

★

Exercice 1

Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et calculer sa valeur :

- 1) $\int_0^{+\infty} e^{-3x^2} dx$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{3x}{2x^2+4} dx$
- 4) $\int_0^1 (\ln(t))^2 dt$
- 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx$
- 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3u} e^{-u^2} 2 du$

★

Exercice 2

Pour chacune des intégrales suivantes, étudier sa nature selon la valeur du réel α :

- 1) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{\sin^3(\pi t^\alpha/2)}} dt$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^\alpha} dt$
- 3) $\int_0^1 \frac{dt}{(\ln(t))^\alpha}$

★

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire positive à densité qui admet une espérance. Le but de cet exercice est de montrer que dans ce cas l'espérance de X peut se calculer de la façon suivante :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geq x) dx$$

On note F la fonction de répartition de X et f sa fonction de densité, et on suppose dans tout l'exercice que F est \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

- 1) Soit A un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\int_0^A P(X \geq x) dx = A - \int_0^A F(x) dx$$

puis à l'aide d'une intégration par partie montrer que

$$\int_0^A P(X \geq x) dx = A - AF(A) + \int_0^A xf(x) dx$$

- 2) Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Quelle est sa valeur ?
- 3) Conclure.

★

Exercice 4

Partie A : séries de Riemann convergentes

- 1) Soit $\alpha > 0$ un réel. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k; k+1]$ on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

- 2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

- 3) En déduire la propriété des séries de Riemann : $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie B : deux équivalents

4) En reprenant l'encadrement de la question 2), montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$$

5) Soit $\lambda < 1$. Montrer que de même que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

6) Montrer que (1, 1) et (3, 2) sont les seules valeurs du couple de réels (α, β) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^\beta$$

Partie C : cas général

7) Montrer que si f est une fonction continue décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors pour tout entier naturel n

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

8) En déduire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes).

9) Donner un contre exemple d'une fonction non monotone f telle que $\sum f(n)$ converge mais $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, et un contre exemple d'une fonction non monotone g telle que $\sum g(n)$ diverge mais $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

10) En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$

Partie D : transformation d'Abel

1) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2) Soit x un réel qui n'est pas un multiple de 2π . Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

3) En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq M$.

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \sin k$, et $S_0 = 0$. En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin n = S_n - S_{n-1}$ Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k} = \frac{1}{n+1} S_n + \sum_{k=1}^n S_k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

5) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$.